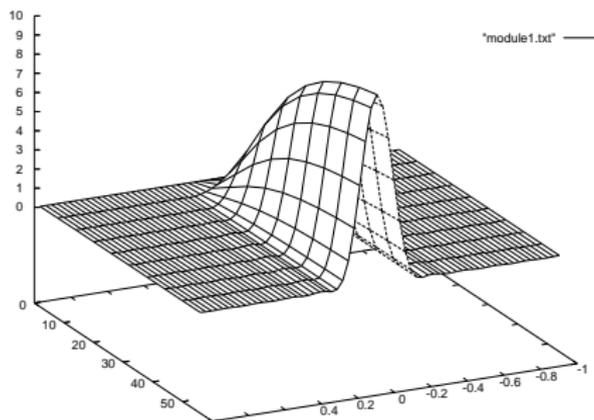


Étude numérique de la formation d'une onde électromagnétique dans un résonateur laser



- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser
- 3 Le résonateur Laser
- 4 Cavité à transformée de Fourier
- 5 Modélisation de la cavité laser

- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser
- 3 Le résonateur Laser
- 4 Cavité à transformée de Fourier
- 5 Modélisation de la cavité laser

Objectifs de l'option

- Approfondir vos connaissances en langage C et GSL
- Appréhender un problème physique et le transposer dans un modèle numérique
- Utilisation intensive des fonctions
- Utilisation des matrices et des générateurs de nombres aléatoires de la GSL
- Apprentissage d'un logiciel de tracé de courbes (GNU Plot)

- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser**
- 3 Le résonateur Laser
- 4 Cavité à transformée de Fourier
- 5 Modélisation de la cavité laser

Le Laser

Le mot «Laser» est une abréviation anglo-saxonne signifiant **Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation**. C'est une source de lumière constituée de deux éléments :

- un amplificateur de lumière utilisant l'émission stimulée,
- un résonateur optique.

Quelques dates :

- 1890 premiers résonateurs (interféromètre de Fabry-Pérot),
- 1917 postulat de l'émission stimulée par Einstein,
- 1950 pompage optique par Kastler,
- 1958 théorie du laser par Townes,
- 1960 première réalisation par Maiman.

Caractéristiques du rayonnement laser :

directivité toute la puissance lumineuse est concentrée dans un pinceau rectiligne très fin appelé faisceau laser,

monochromaticité la couleur de la lumière émise est extrêmement pure. Elle correspond à une onde quasi-sinusoïdale de fréquence située dans le domaine optique (10^{14} Hz),

intensité élevée pour une longueur d'onde et une direction bien précises.

Quantification des niveaux d'énergie

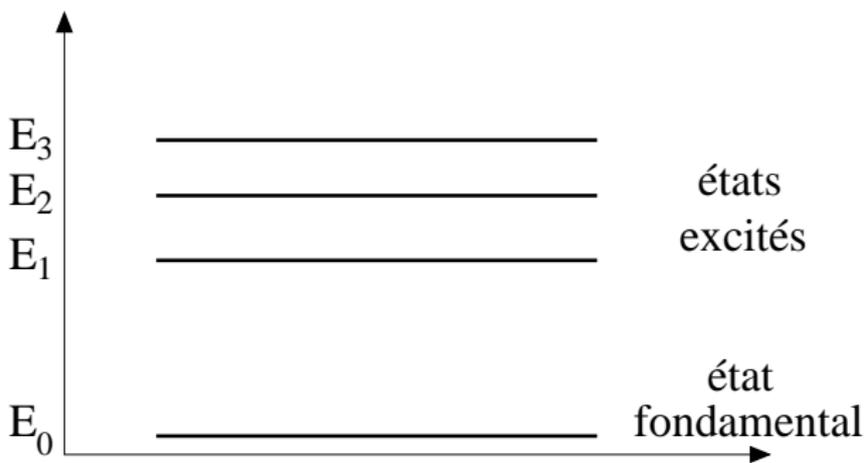


FIG.: Quantification des niveaux d'énergie

Les processus d'échange d'énergie

L'absorption

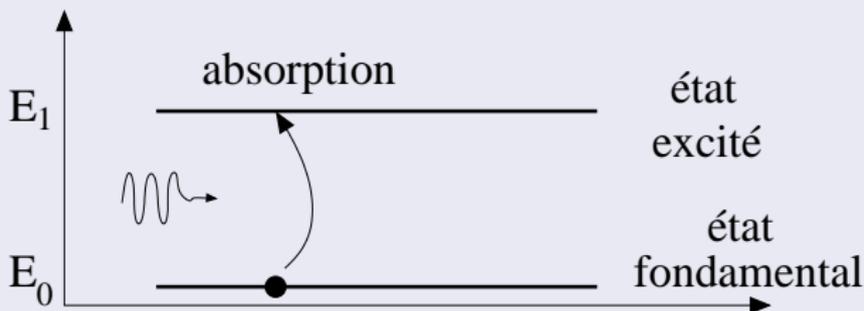


FIG.: Phénomène d'absorption

Ce processus permet alors de peupler un état excité tout en absorbant une énergie lumineuse.

Les processus d'échange d'énergie

L'émission spontanée

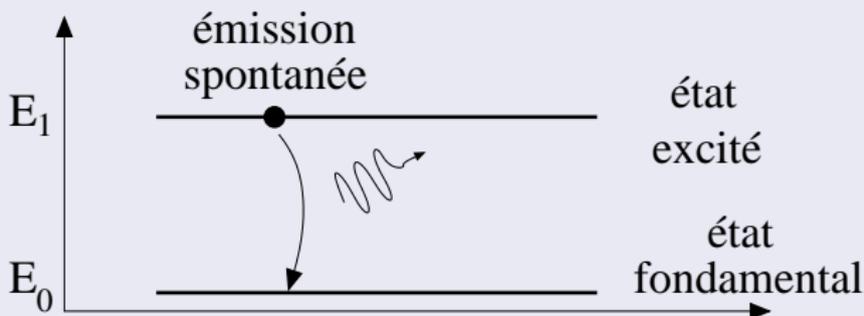


FIG.: Phénomène d'émission spontanée

Les processus d'échange d'énergie

L'émission spontanée

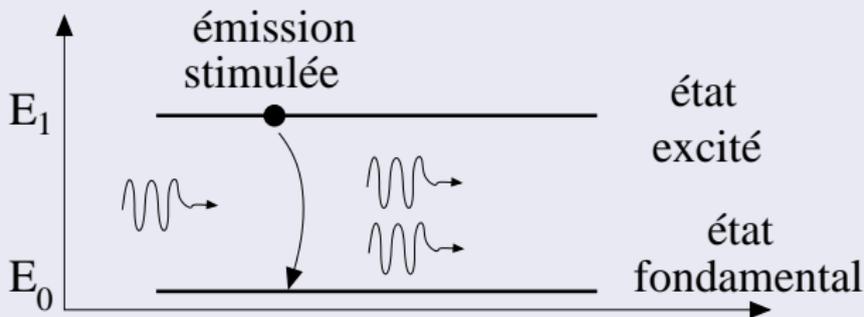


FIG.: Phénomène d'émission stimulée

- même énergie donc même fréquence,
- même direction de propagation,
- même phase : les deux ondes électromagnétiques interfèrent de manière constructive.

Conditions nécessaires pour l'amplification

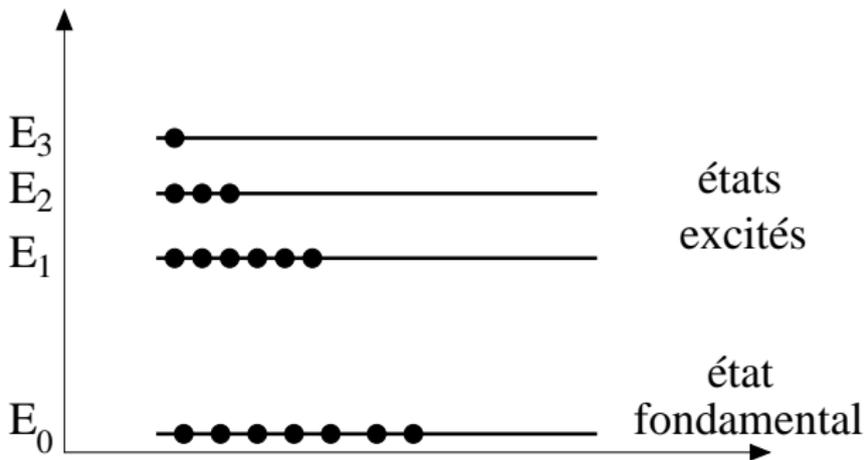


FIG.: décroissance de la population des niveaux lorsque l'énergie augmente

un photon incident a plus de chances d'être absorbé que de créer une émission stimulée, donc une amplification de vibration lumineuse. Le rayonnement incident est alors absorbé par le matériau → pas d'amplification

Inversion de population

Niveaux élevés plus peuplés que le niveau fondamental \rightarrow plus de chances de créer une émission stimulée

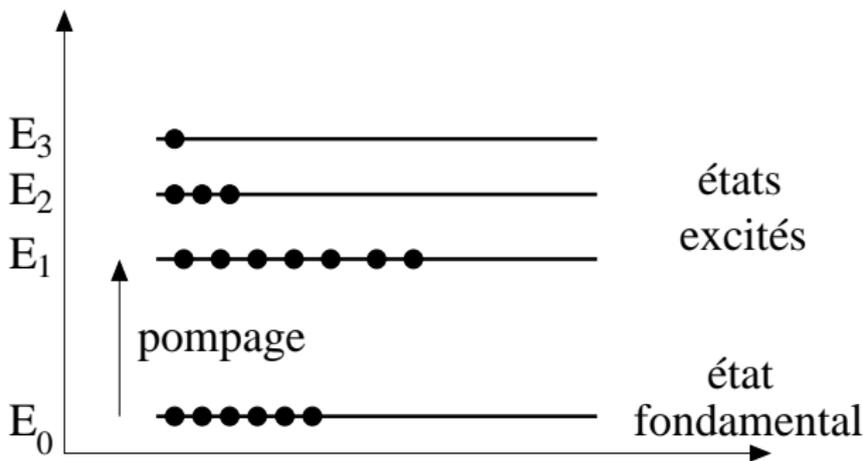


FIG.: Inversion de population

On parle alors d'**inversion de population**. Un photon incident a plus de chances de créer une émission stimulée et donc d'amplifier de

modes de pompage

optique l'énergie provient d'un flash lumineux ou d'un autre laser,

électronique le pompage est réalisé par l'intermédiaire d'une décharge électrique ou d'un courant de forte intensité,

chimique par combustion ou explosion (projet américain de laser embarqué dans un avion pour la destruction de missile en vol).

- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser
- 3 Le résonateur Laser**
- 4 Cavité à transformée de Fourier
- 5 Modélisation de la cavité laser

Description de la cavité

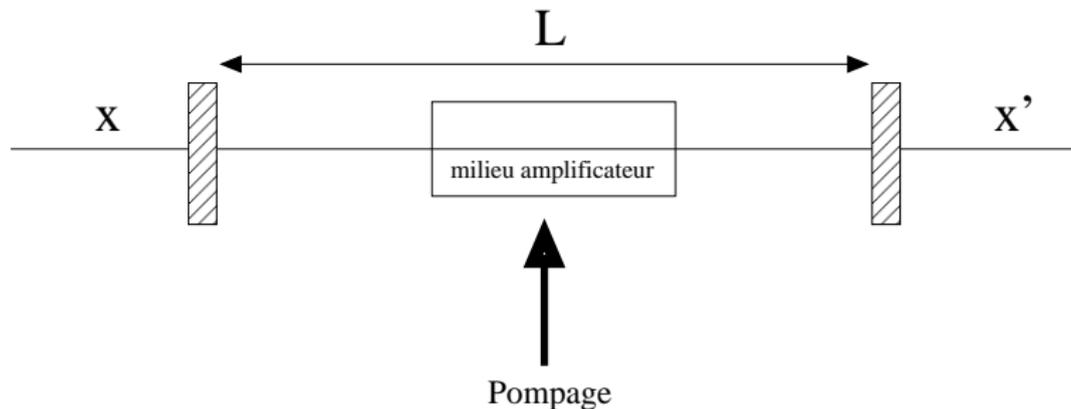


FIG.: Cavité laser (sans milieu amplificateur)

modes spatiaux de la cavité

D'un point de vue spatial, la condition de résonance dans la cavité laser est la suivante :

Les fronts d'onde du champ oscillant dans la cavité doivent épouser la forme des miroirs

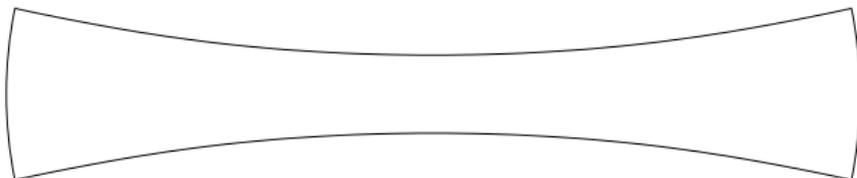
Les distributions du champ vérifiant cette condition se retrouvent égales à elles-mêmes après un aller-retour dans la cavité. On les appelle alors **modes spatiaux de la cavité**.



FIG.: Fronts d'onde plans

modes Gaussiens

Avec des miroirs plans, l'onde à l'intérieur de la cavité est plane.
Cette hypothèse est irréaliste puisque le front d'onde devrait être un plan infiniment étendu et exister en dehors de la cavité.
On utilise en général des miroirs sphériques afin d'obtenir une cavité laser stable.

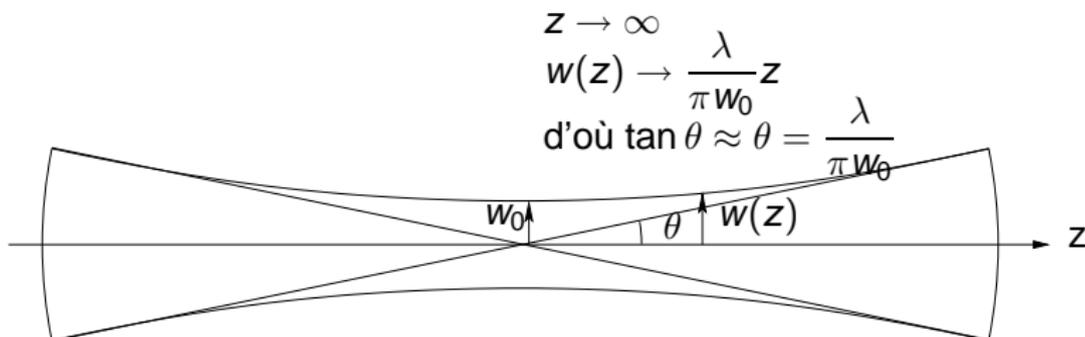


Les formes d'onde pouvant exister dans ce résonateur ont un profil dit **gaussien**.

Le mode fondamental

Nous étudions dans cette partie le mode gaussien le plus simple : le **mode fondamental TEM₀₀**. Ce mode à trois caractéristiques :
L'étalement transversal est donné par :

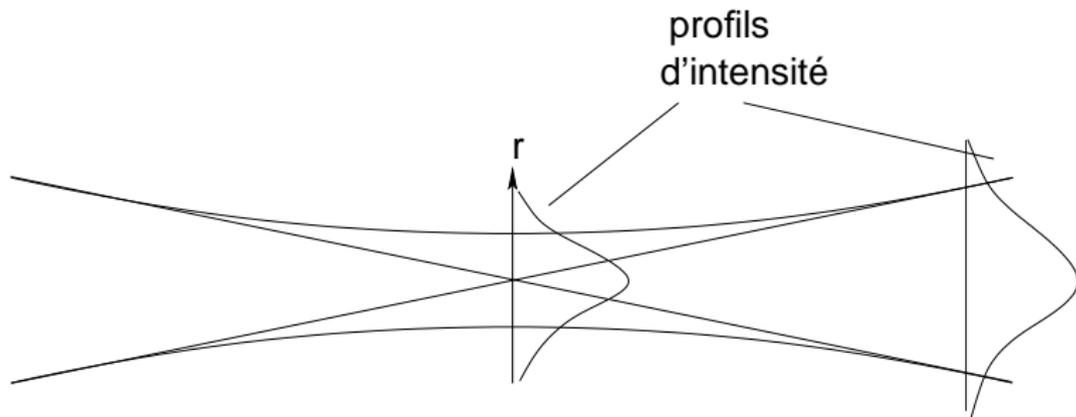
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_f}\right)^2} \quad \text{avec } z_f = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \text{ longueur de Fresnel}$$



Le mode fondamental

Orthogonalement à l'axe, l'intensité décroît suivant une loi de la forme :

$$I(r, z) = \frac{I_0 w_0^2}{w^2(z)} \exp(-2r^2/w^2(z))$$



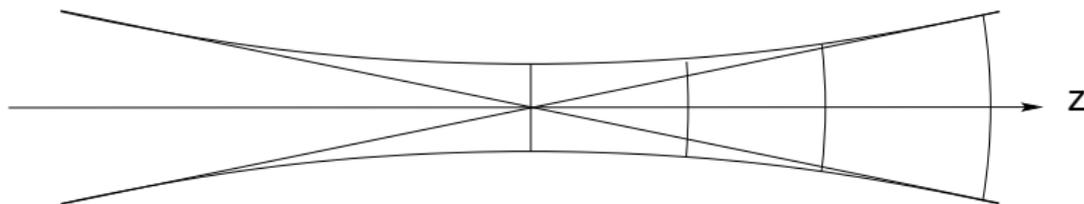
Le mode fondamental

Les fronts d'onde sont sphériques, mais la position du centre de courbure est variable. Le rayon de courbure $R(z)$ varie suivant la loi :

$$R(z) = z + \frac{z_f^2}{z}$$

$$z = 0$$

$$R(z) \rightarrow \infty$$



Important

Important

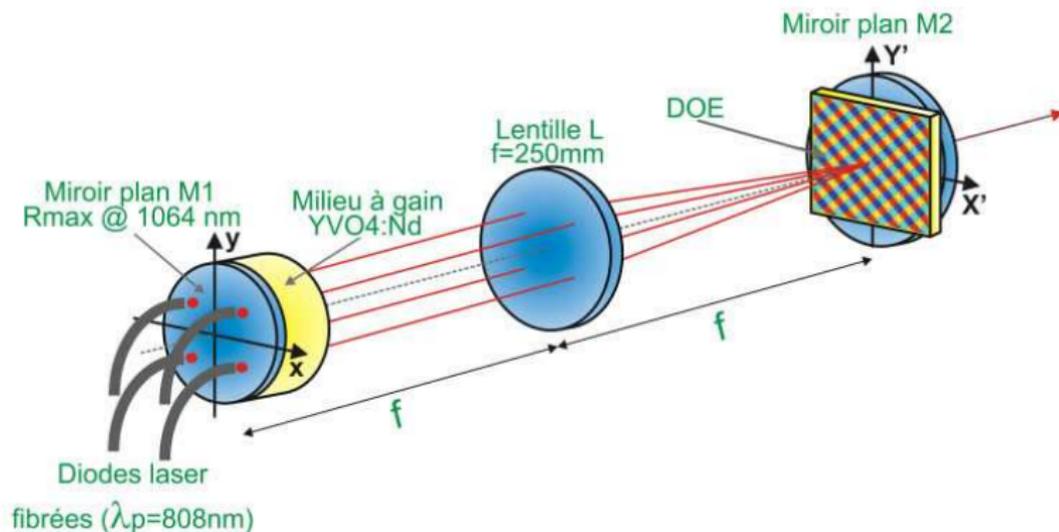
Sans filtrage particulier, tous ces modes (et d'autres encore) peuvent osciller simultanément dans la cavité laser.

Pour obtenir un fonctionnement unimodal, il faut **sélectionner** un mode par filtrage spatial

Ce filtrage peut se faire simplement en plaçant des masques opaques sur la surface des miroirs. On impose alors les zéros du champ électromagnétique

- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser
- 3 Le résonateur Laser
- 4 Cavité à transformée de Fourier**
- 5 Modélisation de la cavité laser

Cavité à transformée de Fourier

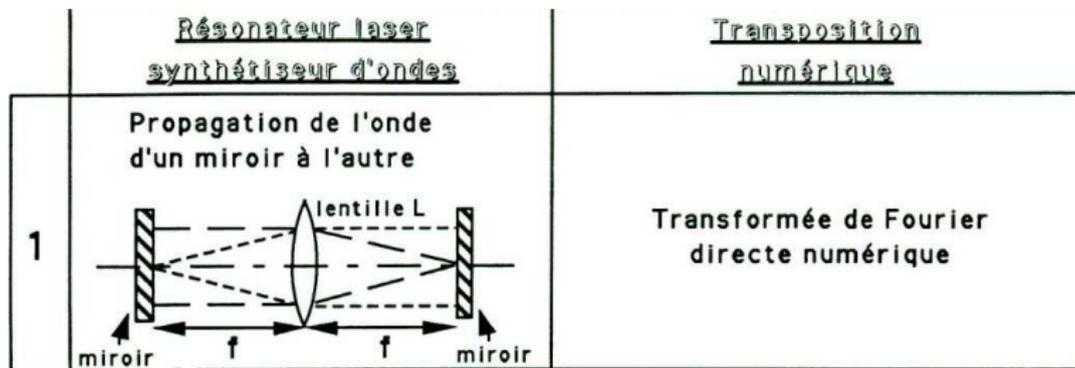


Cavité à transformée de Fourier

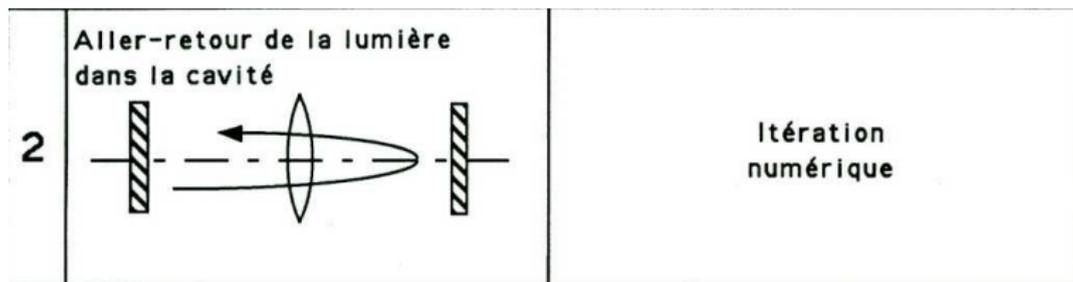
- Les miroirs sphériques sont remplacés par une association lentille convergente–miroir plan
- Les filtres spatiaux sont maintenant à deux dimensions au lieu de trois
- La sélection modale se fait en plaçant des filtres plans au niveau des deux miroirs
- **Les répartitions du champ dans les deux plans des miroirs sont transformées de Fourier l'une de l'autre**

- 1 Introduction
- 2 Généralités sur le Laser
- 3 Le résonateur Laser
- 4 Cavité à transformée de Fourier
- 5 Modélisation de la cavité laser**

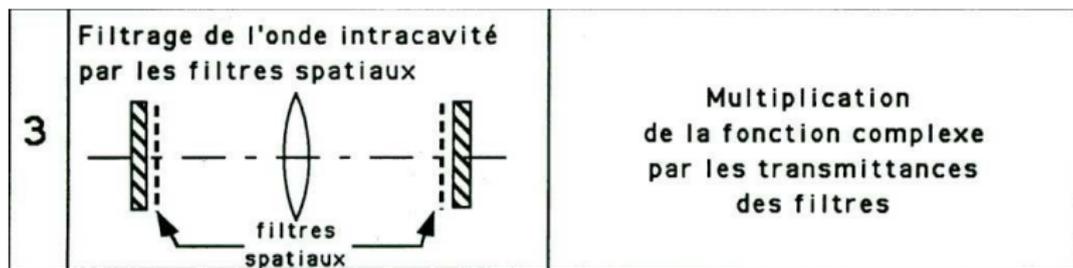
Modélisation de la cavité laser



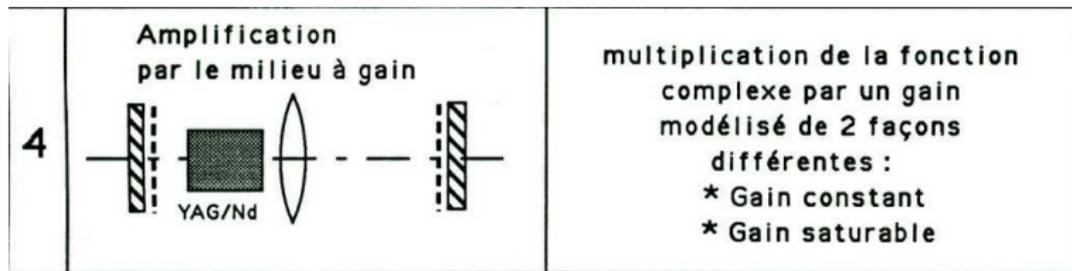
Modélisation de la cavité laser



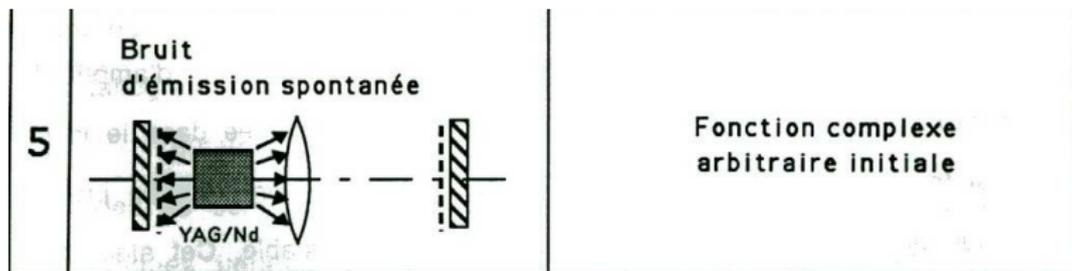
Modélisation de la cavité laser



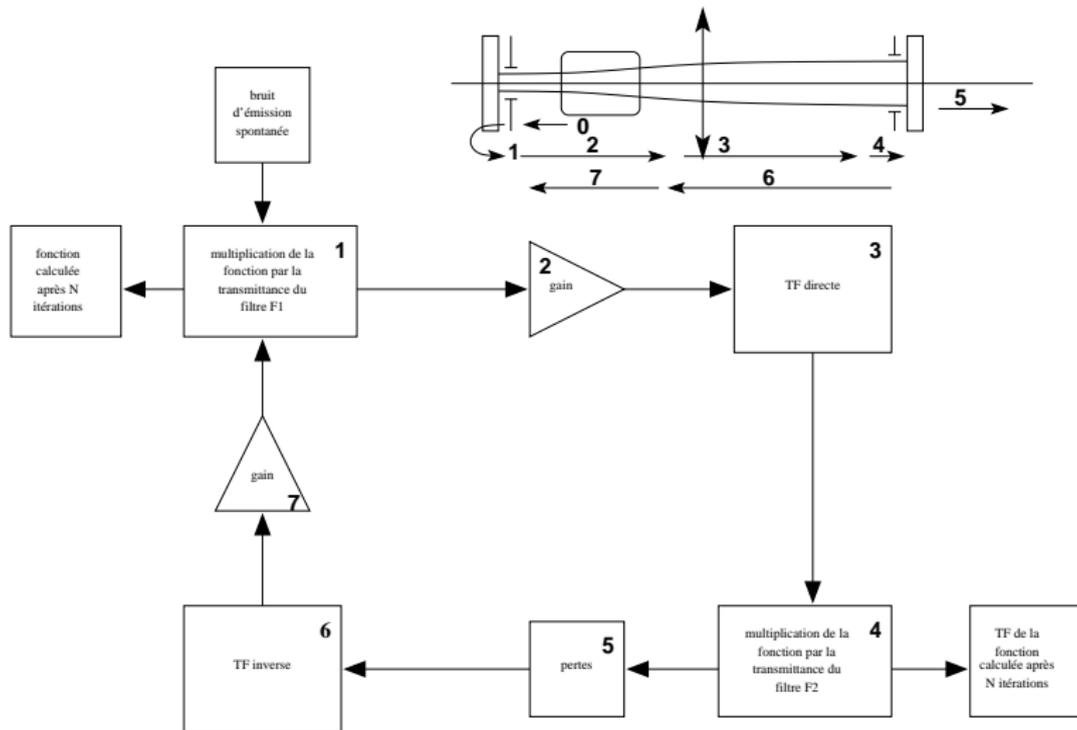
Modélisation de la cavité laser



Modélisation de la cavité laser



Algorithme simplifié



Variables physiques

Variables

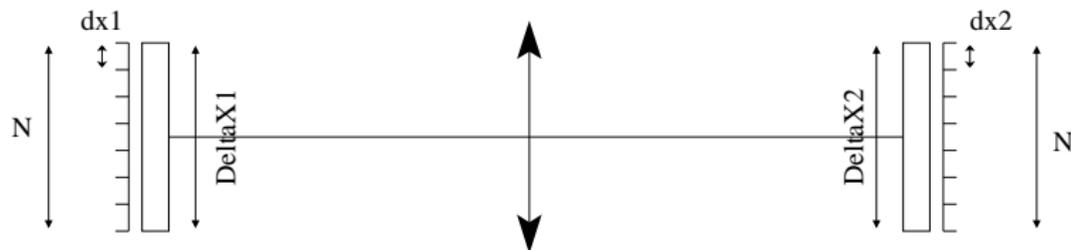
Le champ électrique est placé dans le `gsl_vector_complex` `champ`

```
#define N 128
#define ITERATIONS 50

double lambda = 1064e-6
double f = 500;
```

-> unité de longueur : mm

Maillage

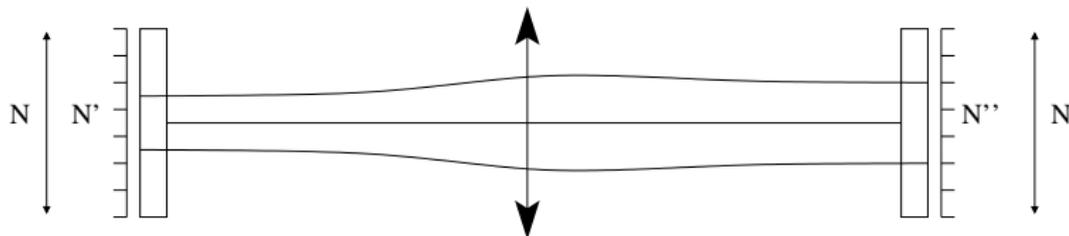


$$\Delta X1 = N \times dx1$$

$$\Delta X2 = N \times dx2$$

$$dx2 = \lambda f / N dx1$$

Maillage



$$N' = \frac{N}{N''}$$

N' et N'' du même ordre de grandeur $\rightarrow N'' \approx N' \approx \sqrt{N}$

Calcul des paramètres du maillage

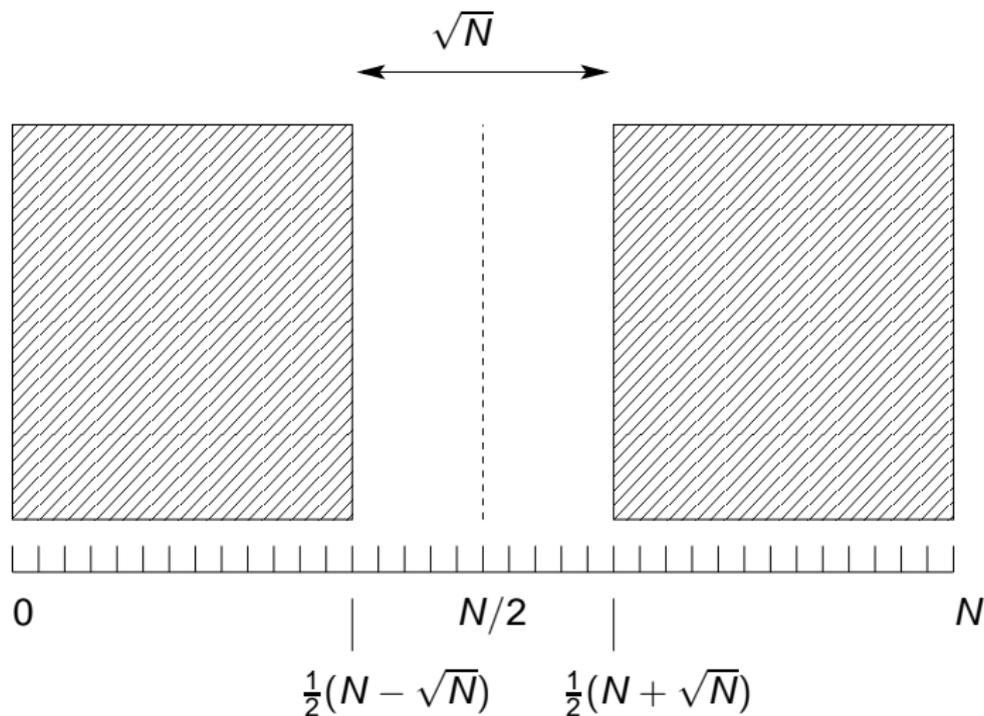
- On fixe N (grand)
- on fixe f et λ
- On fixe Δx_1 (de l'ordre du mm)
- On en déduit $dx_1 = \Delta x_1 / N$
- On en déduit $dx_2 = \lambda f / N dx_1$
- On en déduit $Deltax_2 = N dx_2$

Filtres spatiaux

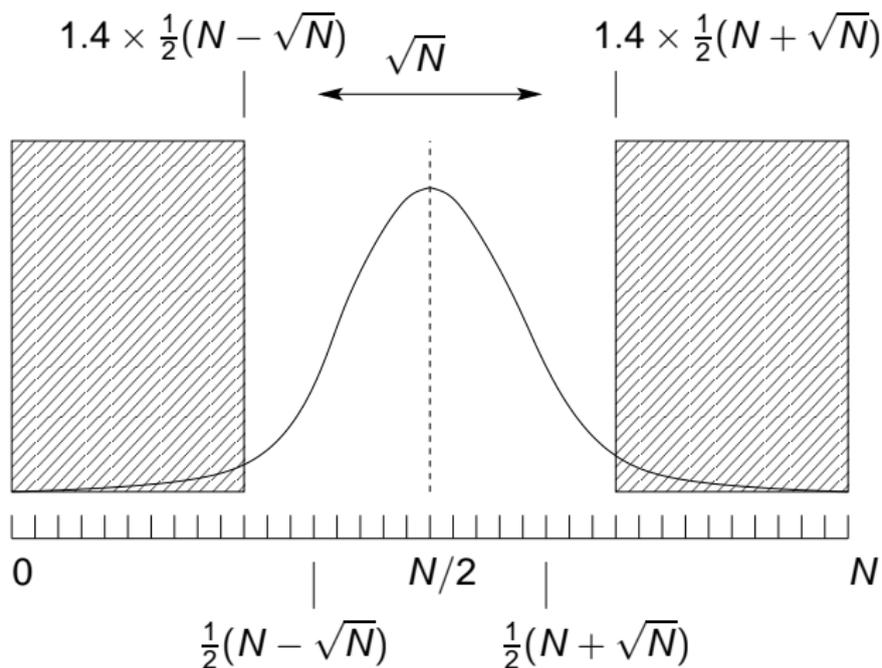
- On définit le filtre 1 sur \sqrt{N} points
- On définit le filtre 2 sur \sqrt{N} points

→ les filtres sont de dimension convenable par rapport à la dimension du vecteur. Ils ont tout deux le même nombre de points (N' et N''), mais ils sont de dimensions physiques différentes car $dx_1 \neq dx_2$.

Exemple : Filtrage par une fente



Exemple : Filtrage par une fente



En pratique, les filtres sont un peu plus grands pour ne couper que les bords de la gaussienne.

Modélisation du bruit d'émission spontanée

Générer des nombres aléatoires sur ordinateur revient à créer une suite d'entiers :

$$I_{n+1} = f(I_n)$$

- La valeur de départ I_0 est appelée graine (seed)
- Elle doit être fournie par l'utilisateur
- La même graine donnera toujours la même suite de nombres
- La suite se reproduit au bout d'un nombre de valeurs appelé **période**
- Cette période doit être la plus grande possible

Modélisation du bruit d'émission spontanée

- Si la fonction f a été correctement choisie, chaque nombre a la même probabilité d'apparaître
- On dit que les nombres aléatoires suivent une **loi uniforme**.
- Les autres lois de probabilité (binomiale, normale...) peuvent être simulées à partir de cette loi uniforme.

Modélisation du bruit d'émission spontanée

- La GSL fournit un grand nombre de générateurs de bruits aléatoires
- Ces générateurs sont modélisés par une variable de type `gsl_rng`
- il faut utiliser le fichier d'en-tête `gsl_rng.h`

Initialisation d'un générateur de nombre aléatoires

```
gsl_rng * gsl_rng_alloc( const gsl_rng_type * T )
```

Création d'un générateur de nombres aléatoires de type Tausworthe :

```
gsl_rng * r = gsl_rng_alloc (gsl_rng_taus)
```

La liste de tous les générateurs se trouve dans la doc de la GSL. Tous fournissent des nombres uniformément répartis.

Modélisation du bruit d'émission spontanée

Générer un nombre aléatoire

On commence par initialiser le générateur :

```
gsl_rng * r = gsl_rng_alloc (gsl_rng_default)
```

génération d'un nombre aléatoire sur la plage [min,max]

```
i = gsl_rng_get( r );
```

génération d'un nombre aléatoire sur la plage [0,1)

```
i = gsl_rng_uniform( r );
```

Modélisation du bruit d'émission spontanée

Initialisation de la graine

- Si on ne précise rien, une graine par défaut est utilisée
- À chaque exécution du programme, la même graine est utilisée
- les mêmes nombres aléatoires sont générés
- Il est préférable de réinitialiser la graine à chaque lancement

```
gsl_rng_default_seed = un_nombre_entier
```

La graine peut par exemple être initialisée en se servant de l'heure de lancement du programme.

Discrete Fourier Transform (DFT)

Définition

Les transformées de Fourier rapides sont des algorithmes efficaces pour calculer les transformées de Fourier discrètes

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(-2\pi ijk/N)$$

Transformée de Fourier inverse

Forward Fourier Transform

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(-2\pi ijk/N)$$

Inverse Fourier Transform

$$z_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(2\pi ijk/N)$$

Backward Fourier Transform

$$z_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(2\pi ijk/N)$$

La TF inverse n'est pas normalisée. Plus rapide et suffisant si seule la forme de la TF est recherchée

Fichiers d'en-tête

- `#include <gsl/gsl_fft_real.h>`
- `#include <gsl/gsl_fft_complex.h>`

La GSL utilise des fonctions différentes selon que les données dont on veut faire la TF sont réelles ou complexes. **Nous ne traiteront que le cas où les données sont complexes.**

Fonctions gsl

- `int gsl_fft_complex_radix2_forward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_backward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_inverse (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_transform (data, stride, n, sign)`

- Ces fonctions ne fonctionnent que si la taille du tableau data est une puissance de 2.

Fonctions gsl

- `int gsl_fft_complex_radix2_forward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_backward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_inverse (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_transform (data, stride, n, sign)`

- Ces fonctions ne fonctionnent que si la taille du tableau data est une puissance de 2.
- n est la dimension du tableau data

Fonctions gsl

- `int gsl_fft_complex_radix2_forward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_backward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_inverse (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_transform (data, stride, n, sign)`

- Ces fonctions ne fonctionnent que si la taille du tableau data est une puissance de 2.
- n est la dimension du tableau data
- Le nombre stride permet de faire la TF en utilisant par exemple 1 point sur 2 si stride vaut 2. On prendra `stride = 1`

Fonctions gsl

- `int gsl_fft_complex_radix2_forward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_backward (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_inverse (data, stride, n)`
- `int gsl_fft_complex_radix2_transform (data, stride, n, sign)`

- Ces fonctions ne fonctionnent que si la taille du tableau data est une puissance de 2.
- n est la dimension du tableau data
- Le nombre stride permet de faire la TF en utilisant par exemple 1 point sur 2 si stride vaut 2. On prendra stride = 1
- forward : sign=-1, backward : sign=+1

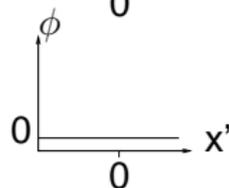
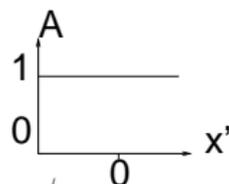
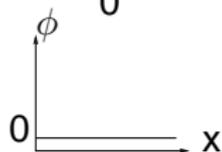
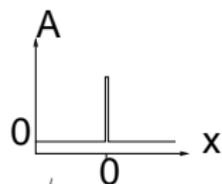
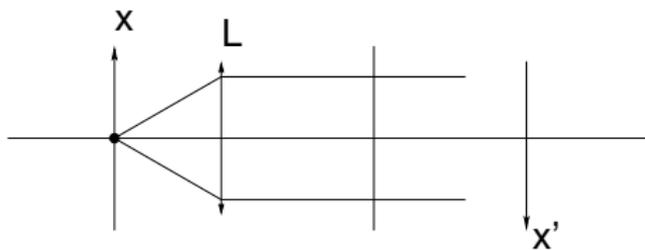
Format du tableau

```
data[0] = Re(z[0])  
data[1] = Im(z[0])  
data[2] = Re(z[1])  
data[3] = Im(z[1])  
data[4] = Re(z[2])  
data[5] = Im(z[2])
```

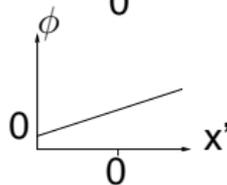
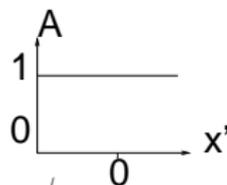
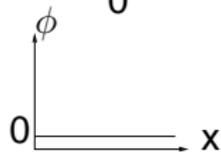
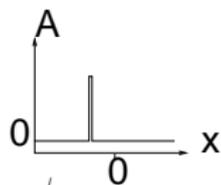
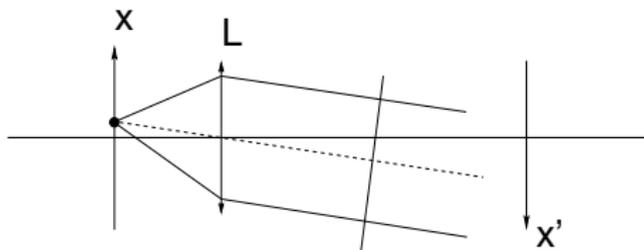
C'est aussi le format des données contenues dans un `gsl_vector`.
On réalise une transformée de Fourier avec la commande :

```
gsl_fft_complex_radix2_forward (v->data, stride, 1)
```

Optique de Fourier



Optique de Fourier : décalage de la source



Important

Important

- Un décalage transversal se traduit par une pente linéaire au niveau de la phase
- Il est nécessaire de centrer parfaitement les filtres pour retrouver correctement la phase de l'onde

Important

- Comment trouver le centre d'un vecteur contenant N éléments avec N pair ?
- Lorsque l'on fait une TF numérique, le centre (la fréquence zéro) se trouve à l'élément $n^{\circ} N/2 + 1$

Exemple : $N = 8$

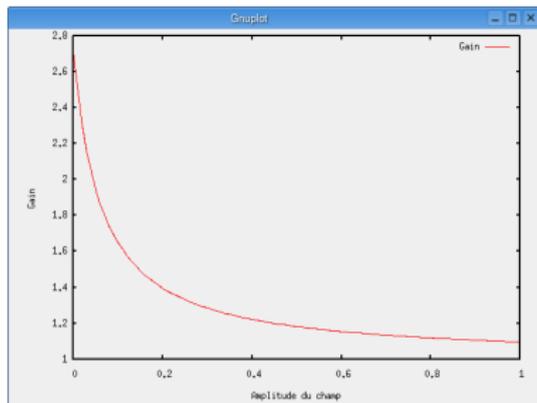


↑
centre

Modélisation du gain

- Le pompage du milieu amplificateur le met en inversion de population
- Le signal optique est amplifié par émission stimulée
- Le milieu amplificateur ne peut pas délivrer plus de puissance que ce qu'on apporte par pompage
- Lorsque l'amplitude du champ dans la cavité devient très grand, on dit qu'il y a **saturation du gain**

Modélisation du gain

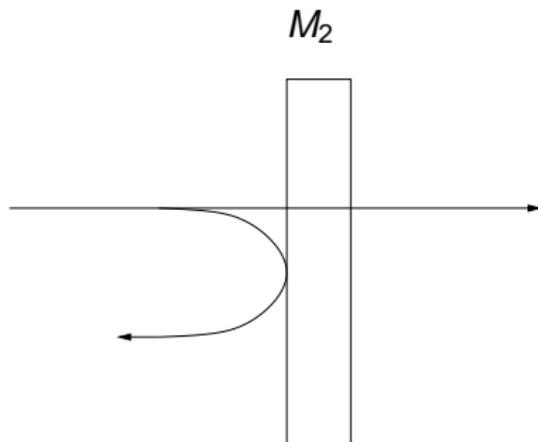


$$G = \exp(g) \quad \text{avec} \quad g = \frac{A}{1 + B * E^2}$$

avec $g_0 = A$ gain pour les petits signaux, B traduit le phénomène de saturation. On choisira $A = 1$, $B = 10$;

Modélisation des pertes

Les pertes sont principalement dues au coefficient de réflexion du miroir de sortie M_2 du laser.



Prise en compte des pertes \rightarrow multiplication du champ par $\sqrt{R_2}$ avec R_2 coefficient de réflexion du miroir.

Modélisation des pertes

Modélisation des pertes